Eine Bemerkung über die Mittelwerte der Potenzreihen.

Von S. SIDON in Budapest.

Herr J. E. LITTLEWOOD[1]) bewies den folgenden Satz:

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $|z|<1$ konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^2|$ divergent, so lassen sich die Faktoren $\varepsilon_n = \pm 1$ derart bestimmen, daß für $0<l<2$ die Ungleichungen

(1) $$M_l(r_k, f) > A(l)\, M_2(r_k, f)\, [\log M_2(r_k, f)]^{2-4l^{-1}}$$

— wo $r_k > 0$, $\lim r_k = 1$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n z^n$,

$$M_l(r_k, f) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} |f^l(r_k e^{i\varphi})|\, d\varphi\right]^{\frac{1}{l}}$$

ist, $A(l)$ nur von l abhängt — bestehen.

Durch eine leichte Modifikation des Littlewoodschen Beweises ergibt sich folgende Verschärfung von (1):

(2) $$M_l(r_k, f) > A(l)\, M_2(r_k, f) \cdot h(M_2(r_k, f)),$$

wo $h(M_2)$ eine beliebige mit M_2^{-1} monoton gegen 0 konvergierende positive Funktion bedeutet.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die a_n positiv vorausgesetzt werden. Nach LITTLEWOOD gibt es eine Folge von Funktionen $f_1(z), \ldots, f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n^{(k)} z^n \; (\varepsilon_n^{(k)} = \pm 1), \ldots$, für welche die Ungleichungen

$$M_1(r_k, f_k) > C\, M_2(r_k, f_k)$$

1) J. E. LITTLEWOOD, On the Mean Values of Power Series, *Proceedings London Math. Society*, (2) 25 (1926), S. 328—337 und *Journal London Math. Society*, 5 (1930), S. 179—182.

bestehen, wo C eine absolute Konstante bedeutet. Hieraus folgt die Existenz einer Funktion $g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx)$, für welche $|g(x)| < 1$ im Intervalle $0 \leqq x \leq 2\pi$ und

$$2\pi \left| \sum_{n=0}^{\tau} a_n \varepsilon_n^{(k_j)} r_{k_j}^n (c_n + d_n) \right| = \left| \int_0^{2\pi} g(x) f_{k_j}(r_{k_j} e^{ix})\, dx \right| >$$

$$> C M_2(r_{k_j}, f) \left| [\log h(M_2)]^{-1} \right|$$

für eine unendliche Indexfolge $k_1 < k_2 < \ldots < k_j < \ldots$ gilt.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{sgn}(c_n + d_n) z^n$$

erfüllt — wenn $1, 2, \ldots, k \ldots$ für $k_1, \ldots, k_j, \ldots$ gesetzt wird — die Ungleichungen (2).

(Eingegangen am 21. November 1934.)